Gimnazija:
“Lucijan Vranjanin”

Maturalna radnja:

DETERMINANTE I MATRICE

Izradio:
Dinko Korunić, učenik 4. G

Mentor:
Milena Bronić, profesor

U Zagrebu, 20. siječnja 1996.

Sadržaj

I. UVOD

Determinanta je u matematici izraz predočen kvadratnom shemom u kojoj je poredano n^2 članova u *n* redaka i *n* stupaca, i to je *determinanta n-tog reda* (tako postoje npr. determinante 2-og ili 3-eg reda):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinante je prvi otkrio i proučavao G. W. Leibniz 1693. godine ispitujući rješenja sistema linearnih jednadžbi. No kasnije se za otkrivača determinanti smatra G. Cramer koji je 1750. godine dao pravila rješavanja jednadžbi pomoću determinanata, a u međuvremenu je Leibnizovo otkriće palo u zaborav. Determinante se široko primjenjuju u matematici tek nakon K. J. Jacobija. Naziv determinante uveo je u matematiku K. F. Gauss.

Matrica je sustav od $m \cdot n$ brojeva složenih u pravokutnu shemu od *m* redova i *n* stupaca. Simbolički se matrica označava pomoću dva para usporednih dužina:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

ali se u novije vrijeme označava i sa zagradom:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

II. DETERMINANTE

<u>*Determinante drugog reda*</u>

Da bismo riješili sistem od dviju linearnih jednadžbi sa dvije nepoznanice

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

potrebno je najprije izjednačiti jednadžbe po nepoznanici *y*, te zato jednadžbu (1) treba pomnožiti sa b_2, a jednadžbu (2) sa $-b_1$. Ako nakon toga zbrojimo te dvije jednadžbe dobijamo:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \qquad (3)$$

Na isti način treba izjednačiti i po nepoznanici *x* iz sistema jednadžbi (1) i (2), pa se dobije:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (4)$$

Ako pretpostavimo da je $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ iz predhodne dvije jednadžbe se dobija određeno rješenje zadanog sistema, i to tako da se jednadžba (3) podijeli sa faktorom uz *x* i analogno tome jednadžba (4) faktorom uz *y*:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ te } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (5) \text{ i } (6)$$

Proučimo li jednadžbe (5) i (6), vidi se da su im nazivnici isti i da su im brojnici slično građeni. Možemo uvesti novu oznaku za izraz $a_1b_2-a_2b_1$, i to:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (7)$$

Analogno tome, možemo zapisati da je:

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \text{ i } D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1. \quad (8) \text{ i } (9)$$

Brojnik i nazivnik dobijenih jednadžbi (5) i (6) se zovu determinante 2-og reda i to su ovdje D, D_1 i D_2. Općenito vrijedi za svaka četiri broja, raspoređena u obliku kvadratne sheme:

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \\ a_{21}, a_{22}, \end{matrix}$$

da se razlika koja odgovara toj shemi zove *determinanta 2-og reda* i ovdje je ta razlika ekvivalentna

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

a zapisuje se simbolički

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Elementi determinante (u predhodnom redu) su brojevi a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}; pri čemu prvi dio indeksa elementa pokazuje broj reda u kojem se element nalazi, a drugi dio indeksa elementa broj stupca u kojem se nalazi taj element. Elementi a_{11} i a_{22} čine *glavnu dijagonalu* determinante, a elementi a_{21} i a_{12} *sporednu dijagonalu*. *Red* ili *redak determinante* čine elementi determinante koji stoje horizontalno jedan do drugoga. *Stupac determinante* čine elementi koji su vertikalno jedan ispod drugoga.
Iz dosadašnjeg izlaganja očigledno je da rješenje sistema može biti izraženo pomoću determinanata ako je D determinanta koeficijenata nepoznanica u sustavu jednadžbi (1) i (2), D_1 je determinanta koja nastaje iz D ako se koeficijenti a_1 i a_2 od x nadomjeste brojevima c_1 i c_2 na desnim stranama jednadžbi, te D_2 je determinanta koja nastaje iz D ako se koeficijenti b_1

i b_2 od y nadomjeste brojevima c_1 i c_2. Konačno rješenje sistema jednadžbi (1) i (2) onda možemo zapisati u obliku:

$$x = \frac{D_1}{D}, \text{ i } y = \frac{D_2}{D} \qquad (10) \text{ i } (11)$$

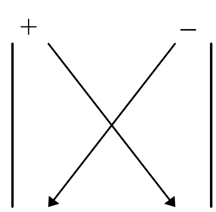
ili opširnije:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (12) \text{ i } (13)$$

Determinanta u nazivniku je sastavljena od koeficijenata nepoznanica sistema jednadžbi, ovdje jednadžbi (1) i (2), i zove se *determinanta tog sistema*, te se označava sa D ili sa Δ.
Ako uvjet $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ nije zadovoljen, tj. $D=0$, onda i determinante D_1 i D_2 moraju biti jednake nuli jer bi inače izrazi (5) i (6) bili kontradiktorni. Znači, ako je $D=0$, a barem jedna od determinanti D_1 i D_2 različita od nule, sistem nema rješenja.
Prema tome, možemo zapisati:

1) ako su koeficijenti nepoznanica u zadanom sistemu (vidjeti početak) neproporcionalni, sistem je moguć i određen;
2) ako su koeficijenti nepoznanica proporcionalni, a slobodni članovi im nisu proporcionalni, sistem je nemoguć zbog proturječja u (5) i (6);
3) ako su koeficijenti nepoznanica i slobodni članovi proporcionalni ($D=D_1=D_2=0$), sistem je neodređen jer ima beskonačno rješenja.

Jednadžbe (5) i (6) te (12) i (13) za $b_1\neq 0$ i $b_2\neq 0$ čine tzv. *nehomogeni sustav*, a za $b_1=b_2=0$ *homogeni sustav jednadžbi*. Iz prethodnih zaključaka slijedi da nehomogeni sustav ima ili samo jedan sustav rješenja, ili uopće nema rješenja, ili ih ima beskonačno mnogo. Homogeni sustav od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice ima rješenja različita od očiglednih, tzv. trivijalnih, samo u slučaju kad je determinanta sustava jednaka nuli, i tada ih ima beskonačno mnogo.
Vrijednost determinante 2-og reda se izračunava tako da se unakrsno množe članovi determinante i pri tome se drugi umnožak dodaje prvom s protivnim predznakom:



<u>*Deteminante trećeg reda*</u>

Rješavanje sistema dviju linearnih algebarskih jednadžbi sa dvije nepoznanice dovodi nas do determinanti drugog reda, a analogno tome nas razmatranje sistema triju linearnih jednadžbi sa tri nepoznanice dovodi do determinanti 3-eg reda. Tako imamo sistem:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad (14)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad (15)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{16}$$

Da bismo riješili taj sistem potrebno je iz jednadžbi (14), (15) i (16) isključiti dvije nepoznanice, npr. y i z kako slijedi. Možemo (15) i (16) izraziti kao:

$$b_2y + c_2z = d_2 - a_2x \tag{17}$$
$$b_3y + c_3z = d_3 - a_3x \tag{18}$$

te onda pomoću analogije sa (3) i (4) slijedi iz (17) i (18):

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} d_2 - a_2x & c_2 \\ d_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2x & c_2 \\ a_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \tag{19}$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_2 & d_2 - a_2x \\ b_3 & d_3 - a_3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x. \tag{20}$$

Ako nakon toga pomnožimo jednadžbu (14) sa faktorom uz y i z u izrazu (19) odnosno (20), uvrstimo zatim izraze iz (19) i (20), te ako determinanti koja stoji uz x izmijenimo stupce uz promjenu predznaka kao i stupce u determinanti koja stoji uz c_1, dobit ćemo:

$$x\left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right\} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Vidimo da se faktor uz x može zapisati kao *determinanta 3-eg reda*:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Pomoću te determinante se može promijeniti desna strana jednadžbe (21) tako da se elementi a_1, a_2 i a_3 u determinanti D zamijene sa d_1, d_2 i d_3, pa jednadžba (21) ovako izgleda:

$$x \cdot D = D_1, \tag{23}$$

pri čemu je D_1 također determinanta trećeg reda:

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Analogno tome se dobiva:

$$y \cdot D = D_2, \tag{25}$$

pomoću

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad (26)$$

i

$$z \cdot D = D_3 \qquad (27)$$

sa

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (28)$$

Iz izraza (23), (25) i (27) se mogu izračunati *x*, *y*, *z* ako vrijedi da $D \neq 0$.
Tada je jednoznačno rješenje sistema jednadžbi (14), (15) i (16):

$$x = \frac{D_1}{D}, \ y = \frac{D_2}{D} \ \text{te} \ z = \frac{D_3}{D}. \qquad (29), (30), (31)$$

Ako je D=0, a barem jedna od determinanata D_1, D_2 ili D_3 različita od nule, vidi se da prema (29), (30) i (31) ne može postojati rješenje. Jednadžbe (14), (15) i (16) su onda proturječne. Ako je $D=D_1=D_2=D_3=0$, onda sistem (14), (15), (16) ima beskonačno mnogo rješenja.
Za izračunavanje vrijednosti determinante trećeg reda možemo se poslužiti *Sarrusovim pravilom*: treba napisati determinantu i uz nju desno još dva prva stupca:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & c_3 \end{array}\right.$$

Sada po shemi tvorimo produkte po tri člana i to prvo u smjeru glavne dijagonale, a zatim produkte od također po tri člana, no u smjeru suprotne dijagonale. Produkte uzete u smjeru glavne dijagonale zbrojimo i od toga oduzmemo zbroj produkata uzetih u smjeru sporede dijagonale.
Ako promotrimo izraz na desnoj strani izraza (22), možemo vidjeti da su elementi a_1,b_1, c_1 pomoženi determinantama drugog reda, koje se mogu dobiti razvijanjem determinante po stupcu ili po retku (u determinanti trećeg reda se precrta redak i stupac u kojem se nalazi dotični element). Za razvijanje determinante se koristimo shemom predznaka:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

po kojoj uzimamo predznake pojedinih elementa kada razvijemo determinantu. Ako želimo da razvijemo determinantu po npr. elementima prvog retka, tada prepišemo prvi element toga retka i precrtamo prvi redak i prvi stupac determinante, te prepisani prvi element množimo s preostalim dijelom determinante. Tako dobivena determinanta 2-og reda se zove *subdeterminanta* ili *minor* dotičnog elementa. Zatim prepišemo s protivnim predznakom (po shemi predznaka) drugi element prvog retka, pa kao i prije množimo taj element sa njegovom determinantom (koju dobijemo kad precrtamo prvi redak i drugi stupac zadane determinante). Naposlijetku prepišemo treći element prvog retka i pomnožimo ga sa njegovom subdeterminantom (koja se dobiva kad se precrta prvi redak i treći stupac u zadanoj determinanti). Sada možemo razviti subdeterminante na već prije objašnjeni način (vidi Determinante 2-og reda). Na analogni način se razvija determinanta 3-eg reda po elementima drugog i trećeg retka, odnosno bilo kojeg stupca.

Determinante viših redova

Determinante *n*-tog reda rješavaju se na isti način kao i determinante trećeg reda, te ih na isti način možemo razviti. Shema predznaka za razvijanje determinante ponaša se analogno shemi predznaka determinanti 3-eg reda. Npr. shema predznaka determinante 4-og reda:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix},$$

a razvijanjem determinante 4-og reda dobivaju se četiri minora trećeg reda.
Pod vrijednosti determinante *n*-tog reda

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (32)$$

podrazumijevamo sumu $D = \sum \pm a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$, gdje je $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ neka permutacija brojeva 1, 2, ..., n. Sumaciju treba protegnuti preko svih takvih permutacija. Pojedini članovi dobivaju predznak plus ako je dotična permutacija parna, a predznak minus ako je neparna. Često se umjesto sheme (32) piše samo $|a_{ik}|$.

Nehomogeni sustav od *n* linearnih jednadžbi s *n* nepoznanica ima za bilo koje desne strane tih jednadžbi samo jedan sustav rješenja x_1, x_2, ..., x_n, ako je determinanta sustava različita od nule. Za $\Delta=0$ taj sustav nema rješenja, ako su determinante u brojnicima izraza za nepoznanice različite od nule, odnosno ima beskonačno mnogo rješenja, ako su te determinante jednake nuli.

Homogeni sustav od *n* linearnih algebarskih jednadžbi s *n* nepoznanica ima rješenja različita od očevidnih ($x_1=0$, $x_2=0$,...,$x_n=0$) samo u slučaju, kada je determinanta sustava $\Delta=0$, i tada ih ima beskonačno mnogo.

Svojstva determinanata

Najvažnija svojstva determinanti su:

1) Determinantu uvijek možemo razviti po elementima bilo kojeg retka i bilo kojeg stupca, te ćemo uvijek dobiti istu vrijednost determinante.

2) Determinanta ne mijenja vrijednost, ako zamijenimo retke determinante u redoslijedu ili stupce determinante u redoslijedu, tj. ako determinantu zaokrenemo za 180° oko njene glavne dijagonale koja ide slijeva na desno (odnosno preklopimo je preko njene glavne dijagonale). To slijedi iz svojstva 1.
3) Determinanta, u kojoj su svi elementi jednog retka ili jednog stupca nule, ima vrijednost jednaku nuli. Razvijemo li takvu determinantu po elementima onog retka ili onog stupca, u kojem su nule, dobit ćemo nulu jer će se svaka subdeterminanta množiti s nulom.
4) Ako u determinanti dva stupca ili dva retka međusobno zamijene položaj, determinanta mijenja predznak. To svojstvo slijedi iz sheme predznaka za računanje determinanata, jer elementi susjednih redaka ili susjednih stupaca imaju suprotne predznake.
5) Vrijednost determinante sa dva jednaka retka ili dva jednaka stupca je jednaka nuli. To slijedi iz svojstva 4: kada bi ta dva stupca ili retka zamijenila položaje, determinanta bi morala mijenjati predznak (svojstvo 4), no izmjenom položaja determinanta se ne mijenja tj. ostaje ista jer su ta dva retka (stupca) jednaki. To znači da je $-D=D$, a to je moguće samo za $D=0$.
6) Imaju li svi elementi jednog retka ili jednog stupca isti faktor, taj faktor pripada čitavoj determinanti pa ga možemo izlučiti tj. postaviti ispred determinante; razvijemo li takvu determinantu po elementima onog retka ili onog stupca koji sadrži tu konstantu tj. stalni faktor, svaki minor će biti pomožen tim faktorom pa je jasno da ga možemo izlučiti ispred cijelog razvoja determinante. Analogno, to znači da determinantu množimo nekim brojem $k\neq 0$ tako da elemente jednog retka ili jednog stupca pomožimo tim brojem.
7) Determinanta ne mijenja svoje vrijednosti ako elementima jednog retka (jednog stupca) pribrojimo pripadne elemente kojeg drugog retka (stupca) eventualno pomožene bilo kojom konstantom. Npr. pomnožimo elemente drugog retka determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

s nekom konstantom $k\neq 0$, pa ih pribrojimo pripadnim elementima prvog retka:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{21} & a_{12}+k\cdot a_{22} & a_{13}+k\cdot a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Razvijemo li tako dobivenu determinantu po elementima prvog retka, po svojstvu 6 možemo izlučiti konstantu *k* pa dobivamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vidimo da je druga determinanta po svojstvu 5 jednaka 0 jer ima dva jednaka retka, pa dobivamo zadanu determinantu.

8) Vrijednost determinante je jednaka nuli, ako su joj dva retka ili dva stupca međusobno proporcionalna. To slijedi iz svojstva 2 i 6. Iz jednog od tih stupaca možemo izlučiti faktor pred cijelu determinantu (svojstvo 6), te u determinanti dobijemo oba stupca (retka) jednaka, a to (svojstvo 2) znači da je vrijednost determinante jednaka nuli.

Računske operacije sa determinantama

Operacije zbrajanja, odbijanja i množenja izvode se nad dvije determinante samo ako su obje istog reda.

1) Zbrajanje:
   Ako se dvije determinante razlikuju najviše u jednom retku (stupcu), njihova je suma jednaka determinanti u kojoj je onaj redak (stupac) u kojem se sumandi razlikuju jednak zbroju dotičnih redaka (stupaca) u sumandima, dok su ostali reci (stupci) isti kao kod oba sumanda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2) Odbijanje:
   Vrši se analogno zbrajanju, tj. jednu determinantu odbijamo od druge ako se razlikuje najviše u jednom stupcu ili retku. U determinanti, koja je rezultat odbijanja, različitim će stupcima (recima) zadanih determinanti odgovarati stupac (redak) koji je jednak razlici tih stupaca (redaka), dok će ostali stupci (reci) biti u sve tri determinante jednaki (iz ovoga slijedi svojstvo 7).
3) Množenje dviju determinanata:
   Produkt dviju determinanata je determinanta kojoj je c_{rs}-ti element jednak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{ks}, \quad r=1, 2, ..., n, \quad s=1, 2, ..., n$$

   gdje su a_{rk} elementi prvog, a b_{ks} elementi drugog faktora produkta. Jednostavnije rečeno, c_{rs}-ti element dobijemo tako da elemente r-tog retka prve determinante pomožimo sa pripadnim elementima s-tog stupca druge i to zbrojimo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} \end{vmatrix}$$

4) Dijeljenje:
   Za prikaz kvocijenta dviju determinanti u obliku determinanti ne postoji pravilo. Ako želimo podijeliti dvije determinante, moramo najprije izračunati njihove vrijednosti, a tek onda te vrijednosti podijeliti.
5) Kvadriranje:
   Do izraza za kvadriranje dolazimo ako primjenimo množenje na dvije potpuno identične determinante, pa se dobije:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix}$$

i to je tzv. *simetrična determinanta* u kojoj su jednaki elementi što leže simetrično spram glavne dijagonale. To vrijedi za determinante *n*-tog reda tj. za sve determinante.

Primjena determinanti kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi

Ako se prisjetimo rješavanja jednadžbi objašnjenog u poglavlju: Determinante 2-og reda:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

iz čega je slijedilo:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ te } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Vidjeli smo da se taj rezultat može zapisati i kao:

$$x = \frac{D_1}{D}, \text{ i } y = \frac{D_2}{D}$$

Također je vrijedilo da je:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ i } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ovakav način rješavanja sustava linearnih jednadžbi pomoću determinanti je prvi primijenio Cramer, te se pravilo za izračunavanje nepoznanica formulom

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ i } y = \frac{D_y}{D}$$

zove *Cramerovo pravilo*.
Za sustav od *n* linearnih jednadžbi sa *n* nepoznanica (koje su x_1, x_2, ..., x_n) rješenja su:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \; x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \; x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je

$$D_i = D_{x_i} \text{ za i=1, 2, ..., n.}$$

III. MATRICE

Pojam i vrste matrica

Ako svrstamo $m \cdot n$ elemenata u pravokutnu shemu koja ima *m* redaka i *n* stupaca, dobit ćemo pravokutnu tablicu koja služi kao izvor za dobivanje različitih determinanata i zove se *pravokutna matrica*. Kao što sam već objasnio u uvodu, matrica se stavlja između dva paralelna pravca ili između zagrade za razliku od determinante. Matrica sama nema numeričke vrijednosti, jer je samo sustav izračunatih veličina, najčešće koeficijenata jednadžbi. Determinante dobivene iz matrice zovu se *minori matrice* ili *subdeterminante matrice* i ako je matrica označena sa **E** onda se njen minor označava sa *E*. Npr. iz matrice

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \text{ tj. } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

možemo dobiti tri determinante Δ drugog reda tako da uzastopno izostavljamo jedan od stupaca, pri čemu svaki put stavimo na prvo mjesto onaj stupac koji slijedi odmah nakon izostavljenog:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\ \text{te } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Rangom matrice zovemo broj koji je jednak najvišem redu determinante (te matrice) koja se ne pretvara u nulu. Znači ako je rang matrice jednak *l*, tada se sve determinante reda (*l*+1) te matrice pretvaraju u nulu, ali postoji barem jedna determinanta reda *l* koja je različita od nule. Rang matrice pokazuje broj linearno nezavisnih jednadžbi zadanog sustava. Ako imamo npr. sustav od tri linearne homogene jednadžbe s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \end{aligned}$$

onda matrica sastavljena od svih koeficijenata tog sustava glasi:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

pa iz te matrice dobivamo slijedeće determinante:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix},\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako je rang *r* matrice **A** jednak 3, tj. ako su sve determinante Δ_1, Δ_2, Δ_3 i Δ_4 različite od nule, ili bar jedna od njih različita od nule, onda gore navedeni sustav jednadžbi ima tri linearno nezavisne jednadžbe, koje daju jedno određeno rješenje sustava. Matrica A je drugog ranga ako je bar jedna od triju determinanata koje nastaju izostavljanjem jednog retka i jednog stupca, različita od nule. Ona je prvog ranga ako je determinanta koja nastaje izostavljanjem jednog retka i dva stupca različita od nule.

Dakle, treba naglasiti da je matrica *tablica brojeva*, a determinanta *broj* prikazan u obliku tablice.
Kao što smo već mogli primjetiti, matrica za razliku od determinante ne mora imati jednak broj redaka i stupaca. Matrice od jednog stupca se nazivaju *vektori*, a njihovi elementi *komponente* (u donjem slučaju x_1, x_2 i x_3):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matrica se može prikazati ovako:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]$$

pri čemu su i=1, 2, ..., m redni brojevi redaka matrice,
j=1, 2, ..., n redni brojevi stupaca matrice.
Matrica koja ima *m* redaka i *n* stupaca zove se *m*×*n* matrica ili (*m*,*n*)-matrica. Ako se želi za matricu $A = \left[a_{ij}\right]$ naznačiti broj redaka i broj stupaca, onda možemo zapisati i kao $A = \left[a_{ij}\right]_m^n$.
Dakle, (*m*,1)-matrica ili (1,*n*)-matrica je *m-redni vektor* (matrica-redak) odnosno *n-stupčani vektor* (matrica-stupac). Vektor možemo zapisati i kao:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ odnosno } b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

pri čemu je a (*m*,1)-redni vektor, a b (1,*n*)-stupčani vektor. Ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, tj. ako je (*m*=*n*) imamo *kvadratnu matricu* reda *n* ili kraće (*n*)-matricu.
Kod kvadratnih matrica postoje *dijagonalne matrice* u kojima su svi elementi različitih indeksa (*i*≠*j*) jednaki nuli (tj. svi elementi izvan glavne dijagonale su jednaki nuli):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kod njih vrijedi da elementi različiti od nule leže na *glavnoj dijagonali* matrice.
Skalarne matrice su vrsta dijagonalnih matrica za koje vrijedi da su im svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki ($a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}$). Skalarna matrica kojoj su svi dijagonalni elementi jedinice, a svi ostali nule naziva se *jedinična matrica* i označava se sa **E**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako je zaključiti da za svaki *n* postoji jedna jedinična matrica.
Također, još postoji i *donja trokutna matrica*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

i *gornja trokutna matrica*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix},$$

koje su isto tako podvrsta dijagonalnih matrica.
Dakle, za matrice vrijedi:

1) Determinanta dijagonalne matrice jednaka je umnošku njenih elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\det \mathbf{A} = A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn},$$

   pa stoga izlazi da je determinanta matrice **E** (jedninična matrica) jednaka 1 (vidjeti determinante), što se zapisuje kao:

$$\det \mathbf{E} = E = 1.$$

2) Determinanta matrice koja se sastoji od jednog broja jednaka je tom broju.
3) Matrica čiji su svi elementi nula zove se *nulta matrica* i označava se sa **0**.
4) Dvije (m,n)-matrice su *jednake* ako i samo ako imaju iste elemente u istom položaju, dakle:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]_m^n, \ \mathbf{B} = \left[b_{ik}\right]_m^n,$$

   pa možemo pisati **A**=**B** onda i samo onda, kada vrijedi:

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n).$$

   Može se vidjeti da je relacija jednakosti definirana samo među matricama koje imaju isti broj redaka i isti broj stupaca.

Također, iz definicije slijedi da relacija jednakosti ima svojstvo *refleksivnosti*, tj. svaka je matrica sama sebi jednaka,tj. (**A**=**A**).

Zatim ima svojstvo *simetrije* tj. (**A**=**B**) $\Leftrightarrow$ (**B**=**A**).

Ima još i svojstvo *tranzitivnosti*, tj. (**A**=**B**) & (**B**=**C**) $\Rightarrow$ (**A**=**C**).

Trokutna matrica ima slijedeća svojstva:

1) Determinanta bilo kakve trokutne matrice jednaka je produktu njenih elemenata koji su na glavnoj dijagonali.
2) Produkt dviju gornjih ili dviju donjih trokutnih matrica istog reda daje gornju, odnosno donju trokutnu matricu.
3) Produkt gornje i donje, odnosno donje i gornje trokutne matrice istog reda, daje kvadratnu matricu istog reda.

Računske operacije sa matricama

1) Zbrajanje:

Pod zbrojem dviju (m,n)-matrica **A** i **B** podrazumijeva se (m,n)-matrica **C**. Važno je primjetiti da je moguće zbrojiti samo matrice koje imaju isti broj redaka i isti broj stupaca. Matrica dobivena zbrajanjem, i to tako da se posebno zbroje svi pripadni elementi tih matrica, ima isti broj redaka i isti broj stupaca kao i polazne matrice. Dakle ako:

$$\mathbf{A}=\left[a_{ik}\right]_m^n,\ \mathbf{B}=\left[a_{ik}\right]_m^n \text{ i } \mathbf{C}=\left[a_{ik}\right]_m^n,$$

$$\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B}),$$

onda:

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1, ..., m; k=1, ..., n).$$

Npr.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}.$$

Važno je primjetiti da pravilo zbrajanja vrijedi za bilo koji (konačni) broj pribrojnika. Za zbrajanje matrica vrijede zakoni *komutacije* i *asocijacije* kao i za obične brojeve:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})=(\mathbf{B}+\mathbf{A}) \quad \text{(komutacija)},$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \quad \text{(asocijacija)}.$$

Dokaz da ovi zakoni vrijede proizlazi neposredno iz toga da ti zakoni vrijede za zbrajanje samih elemenata.

2) Oduzimanje:

Razlika dviju matrica je definirana analogno kao zbroj. Dakle, umjesto da se elementi zbrajaju oni se oduzimaju, odnosno elementi suprahenda se oduzimaju od odgovarajućih elemenata minuenda:

$$\mathbf{C}=(\mathbf{A}-\mathbf{B}),$$

znači:

$$c_{ik}=a_{ik}-b_{ik} \quad (i=1, ..., m; k=1, ..., n).$$

Vrijede isti zakoni za oduzimanje kao i za zbrajanje. Važno je još jednom naglasiti da su operacije zbrajanja i oduzimanja definirane samo među matricama istog broja stupaca i redaka tj. među matricama istog oblika.

3) Produkt matrice **A** i broja tj. skalara λ:
Produkt broja λ s matricom **A** dobiva se tako da se svi elementi od **A** pomnože sa λ, tj.:

$$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}=\mathbf{A}\lambda$$

znači:

$$b_{ik}=\lambda\cdot a_{ik} \quad (i=1, ..., m; k=1, ..., n).$$

Za ovo množenje vrijede zakoni (λ i μ su skalari, a **A** je matrica):

$$\lambda\mathbf{A}=\mathbf{A}\lambda \quad (\textit{komutacija}),$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{A}=\lambda(\mu\mathbf{A}) \quad (\textit{asocijacija}).$$

a za kombinaciju zbrajanja i množenja vrijede dva zakona *distribucije*:

$$(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A},$$

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})= \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}.$$

4) Množenje matrice sa matricom:
Produkt matrice **A** sa matricom **B** definira se samo za slučaj da je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Neka je $\mathbf{A}=\left[a_{ik}\right]$ (m,q)-matrica, a $\mathbf{B}=\left[b_{ik}\right]$ (q,n)-matrica. Onda je njihov produkt $\mathbf{C}=\left[c_{ik}\right]$ (m,n)-matrica za koju vrijedi da su joj elementi c_{ik} određeni sa:

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sk} \quad (i=1, ..., m; k=1, ..., n).$$

To znači da (i,k)-ti element produkta dobiva množenjem i-tog retka prvog faktora s k-tim stupcem drugog faktora. Postupak je analogan množenju determinanti samo što se ovdje može samo množiti retke sa stupcima. Za tako definirano množenje vrijedit će zakoni:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\textit{asocijacija}),$$

$$\lambda(\mathbf{AB})=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B},\ (\mathbf{AB})\lambda=\mathbf{A}(\mathbf{B}\lambda) \quad (\textit{asocijacija}),$$

$$(\mathbf{A}\lambda)\mathbf{B}=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) \quad (\textit{asocijacija}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA} \quad (\textit{distribucija}).$$

Važno je primjetiti da zakon *komutacije* kod matrica općenito ne vrijedi. Ako je **A** (m,n)-matrica, a B (p,q)-matrica, onda produkt **AB** ima smisla samo ako je $(n=p)$, a produkt **BA** ima smisla samo ako je $(m=q)$. Dakle, zakon komutacije bi vrijedio samo za kvadratne matrice, no ni tada ne uvijek. Matrice **A** i jedinična matrica **E** su uvijek komutativne. Matrice **A** i **B** su *antikomutativne* ako je $(\mathbf{AB}=-\mathbf{BA})$.
Zanimljivo je i da produkt dviju matrica može biti nulmatrica, a da nijedan faktor nije nula (vidjeti o singularnim matricama), npr.:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice se mogu množiti sa lijeva, npr. možemo jednoelementnu matricu $[a]$ pomnožiti zdesna s jednim vektorom:

$$[a] \cdot [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] = [ab_1 \quad ab_2 \quad \dots \quad ab_n],$$

ili slijeva sa stupčanim vektorom:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot [a] = \begin{bmatrix} b_1 a \\ \dots \\ b_n a \end{bmatrix}.$$

Još možemo primjetiti da je determinanta produkta dviju kvadratnih matrica jednaka produktu determinanata tih matrica (*Cauchyjev teorem*).

5) Skalarni produkt dvaju vektora:
Pod *skalarnim* ili *nutarnjim produktom* (**a**,**b**) dvaju vektora **a** i **b** (bez obzira jesu li stupčani ili redni vektori) podrazumijevamo:

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n .$$

Dakle, skalarni produkt (**a**,**b**) je broj (skalar), za razliku od produkta $\tilde{a}\,\mathbf{b}$ koji je matrica.

6) Potenciranje matrice:
k-ta potencija *n*-matrice **A** je produkt od *k* jednakih faktora **A**. Također, definiramo nultu potenciju sa:

$$A^0 = E,$$

tj. pod nultom potencijom *n*-matrice podrazumijevamo jediničnu *n*-matricu. Očito je iz definicije množenja matrica da se samo kvadratne matrice mogu međusobno množiti sa samim sobom, jer inače nisu ispunjeni uvjeti za brojeve redaka i stupaca. Stoga se i potenciranje definira samo za kvadratne matrice. Također je očito da za potenciranje vrijedi:

$$A^p A^q = A^{p+q} .$$

Transponiranje matrica

Ako se (*m*,*n*)-matrica **A**=$[a_{ik}]$ preklopi oko njene glavne dijagonale, njeni će stupci postati recima, a reci stupcima. Dobit ćemo novu matricu koja je *transponirana matrica* s obzirom na matricu **A** i označavamo ju sa $\tilde{A}$. Na taj način se matrica **A** pretvara u matricu $\tilde{A}$. Njene elemente ćemo označiti sa $\tilde{a}_{ik}$, tako da vrijedi:

$$\tilde{a}_{ik} = a_{ki}, \text{ tj. } \tilde{A} = [\tilde{a}_{ik}] = [a_{ki}].$$

Ta matrica je (*n*,*m*)-matrica. tj. broj njenih redaka je jednak broju stupaca prvotne matrice, a broj njenih stupaca je jednak broju redaka prvotne matrice.

Vrijedi:
1) Ako nad matricom **A** izvršimo dvaput operaciju transponiranja, matrica **A** ostaje nepromijenjena.
2) Transponirana matrica zbroja dviju matrica jednaka je zbroju transponiranih matrica:

$$\left(\widetilde{A+B}\right) = \tilde{A} + \tilde{B}.$$

3) Determinanta matrice **A** jednaka je determinanti matrice $\tilde{A}$:

$$\det \mathbf{A} = A = \det \tilde{A} = A.$$

4) Transponirana matrica produkata dviju ili više matrica jednaka je produktu transponiranih matrica uzetih u obratnom poretku:

$$\left(\widetilde{A\,B}\right) = \tilde{B}\tilde{A},$$

$$\left(\widetilde{A\,B\,C}\right) = \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}.$$

Posebne vrste kvadrantih matrica

1) Simetrične i kososimetrične matrice:
   Kvadratna matrica se naziva *simetrična matrica* ako su njeni elementi, koji leže simetrično s obzirom na glavnu dijagonalu, međusobno jednaki (tj. $a_{ij}=a_{ji}$). *Kososimetrična matrica* ili *antisimetrična matrica* je matrica kod koje su elementi, simetrično raspoređeni obzirom na glavnu dijagonalu, jednaki po veličini i protivni po predznaku (tj. $a_{ij}=-a_{ji}$). Iz definicije transponiranja matrica i definicije ovih dviju vrsta matrica slijedi da vrijedi:

   za simetričnu matricu $A = \tilde{A}$,

   a za kososimetričnu matricu $A = -\tilde{A}$.

   Produkt matrice **A** i transponirane matrice $\tilde{A}$ daje simetričnu matricu **B**:

$$A\tilde{A} = B,$$

   jer je:

$$\tilde{B} = (\widetilde{A\ \tilde{A}}) = (\tilde{\tilde{A}})\tilde{A} = A\tilde{A} = B.$$

   Za simetrične i antisimetrične matrice vrijedi slijedeći teorem:
   Svaka kvadratna matrica **A** se može jednoznačno rastaviti u zbroj jedne simetrične matrice $\mathbf{A_s}$ i jedne antisimetrične matrice $\mathbf{A_a}$, tj.:

$$A_s = \frac{A + \tilde{A}}{2} \ \text{ i } \ A_a = \frac{A - \tilde{A}}{2}.$$

2) Regularne kvadratne matrice:

Kvadratna matrica naziva se *singularnom matricom* ako je njena determinanta jednaka nuli, tj. det **A**=0, a *nesingularnom* ili *regularnom* matricom ako joj je determinanta različita od nule, tj. det **A**≠0. Npr. trokutna matrica je singularna ako je makar jedan njen element jednak nuli.

3) Ortogonalna matrica:

Za neku kvadratnu matricu **A** ćemo reći da je *ortogonalna matrica* ako je produkt te matrice i njoj transponirane matrice $\widetilde{A}$ jednak jediničnoj matrici **E**, tj. ako je:

$$A \cdot \widetilde{A} = E.$$

Za ortogonalnu matricu vrijedi:

a) Determinanta ortogonalne matrice jednaka je (+1) ili (−1). Zbog svojstva determinanti vrijedi:

$$|A| = |\widetilde{A}|.$$

Dalje, zbog definicije ortogonalne matrice i zbog Cauchyjevog teorema vrijedi:

$$|A\widetilde{A}| = |A| \cdot |\widetilde{A}| = |A|^2 = 1,$$

pa je uvijek

$$|A| = \pm 1.$$

b) Produkt dviju ortogonalnih matrica uvijek je ortogonalna matrica. Ako su **A** i **B** dvije ortogonalne matrice, vrijedi po definiciji:

$$A \cdot \widetilde{A} = E, \text{ i } B \cdot \widetilde{B} = E.$$

Tada dalje vrijedi:

$$(AB) \cdot \left(\widetilde{AB} \right) = (AB) \cdot \left(\widetilde{B}\widetilde{A}\right) = A\left(B\widetilde{B}\right)\widetilde{A} = (AE)\widetilde{A} = A\widetilde{A} = E.$$

Pa je prema definiciji produkt **AB** sigurno ortogonalna matrica.

c) Algebarski kofaktor nekog elementa ortogonalne matrice je jednak tom elementu ili mu je protivan, prema toma da li je determinanta matrice pozitivna ili negativna, tj. vrijedi relacija:

$$A_{ij} = |A| \cdot a_{ij} \quad (i,j=1, 2, ..., n).$$

d) Ortogonalna matrica je komutativna sa svojom transponiranom matricom, tj. za svaku ortogonalnu matricu **A** uvijek vrijedi:

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A,$$

zbog toga što vrijedi da $A \cdot \widetilde{A} = E$ i $\widetilde{A} \cdot A = E$.

4) Inverzna kvadratna matrica:

Ako se podsjetimo da recipročna vrijednost a^{-1} nekog broja a ima svojstvo da pomnožena s a daje 1, analogno slijedi da je *inverzna matrica* $\mathbf{A^{-1}}$ neke kvadratne matrice **A** definirana svojstvom da pomnožena s **A** (bilo slijeva, bilo zdesna) daje jedniničnu matricu **E**, tj.:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Inverzna matrica ima slijedeća svojstva:

a) Singularna matrica nema inverzne matrice. Regularna matrica $\mathbf{A}=\left[a_{ik}\right]$ ima jednoznačno određenu inverznu matricu $\mathbf{A^{-1}}=\left[\alpha_{ik}\right]$ kojoj su elementi α_{ik} određeni sa:

$$\alpha_{ik}=\frac{A_{ki}}{A},$$

pri čemu je općenito A_{ik} kofaktor elementa a_{ik} zadane matrice **A**, dok je A determinanta matrice **A**. Kofaktor je definiran kao i kod determinanata,

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}D_{ik}$$

gdje je D_{ik} subdeterminanta elementa a_{ik}.

b) Determinanta inverzne matrice $\mathbf{A^{-1}}$ recipročna je vrijednost determinante A matrice **A**.

$$|E|=1=\left|AA^{-1}\right|=|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=A\cdot\left|A^{-1}\right|,$$

dakle:

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{A}.$$

c) Pod potencijom $\mathbf{A^{-n}}$ regularne matrice **A** (n je prirodan broj) razumijevamo n-tu potenciju inverzne matrice $\mathbf{A^{-1}}$:

$$A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^{n}.$$

d) Inverzna matrica produkata dviju ili više regularnih matrica jednaka je produktu inverznih matrica pojedinih faktora, no u obrnutom redoslijedu:

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

e) Dvije n-matrice **A** i **B** se nazivaju *djelitelji nule* ako su različite od nulmatrice, a produkt **AB** im je nulmatrica, tj.:

$$\mathbf{A}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{B}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{AB}=\mathbf{0}.$$

Djelitelji nule su uvijek singularne matrice, a dokaz tog teorema se provodi pomoću inverznih matrica.

Postupak za računanje inverznih matrica

1. korak Računamo za zadanu matricu **A** vrijednost determinante, tj.

$$\Delta=\det\mathbf{A}=A.$$

2. korak Zadanu matricu **A** transponiramo da dobijemo matricu $\widetilde{A}$.

3. korak Za svaki element matrice $\widetilde{A}$ računamo (redak po redak) pripadne *kofaktore* ili *algebarske komplemente*, tj. subdeterminante, koje dobivamo tako da precrtamo stupac i redak u kojem leži dotični element pri čemu uzimamo predznake plus i minus naizmjenice bez obzira na predznak elementa za koji računamo kofaktor.

4. korak U matrici **A** zamijenimo svaki element pripadnim kofaktorom.
5. korak Podijelimo li svaki član tako dobivene matrice s Δ=det **A**, dobit ćemo traženu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ inverznu s obzirom na polaznu matricu **A**.
6. korak Provjerimo vrijedi li:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = 1 .$$

Recipročna matrica i transponirana recipročna matrica

1) *Recipročna matrica* $\mathbf{A}^*$ kvadratne matrice $\mathbf{A}=\left[a_{ik}\right]$ je matrica kofaktora A_{ik} elementa a_{ik} zadane matrice , tj.:

$$A^* = \left[A_{ik}\right].$$

2) *Transponirana recipročna matrica* ili *adjungirana matrica* $\widetilde{A}^*$ se dobiva preklapanjem recipročne matrice oko glavne dijagonale, pa vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}^*}{\det A},$$

odnosno inverzna matrica kvadratne regularne matrice **A** je jednaka transponiranoj recipročnoj matrici $\widetilde{A}^*$ podijeljenoj sa determinantom A matrice **A**.

Detaljnije o rangu matrice

Subdeterminantom reda k (m,n)-matrice **A**, pri čemu vrijedi da $(k \leq m)$, $(k \leq n)$, naziva se determinanta D, koja se sastoji od k^2 elemenata kojima je poredak sačuvan i leže u sjecištu nekih k redaka i nekih k stupaca. Kao što sam već rekao, rangom matrice **A** se naziva *najveći red* što ga mogu imati subdeterminante matrice koje su različite od nule. Očito je da zbog kvadratnog oblika determinanti najveći red l subdeterminante je uvijek jednak manjem broju od brojeva redaka m i stupaca n (znamo da kod kvadratne matrice m=n, pa je onda l=m=n). Matrica **A** ima rang l ako je bar jedna od tih subdeterminanti različita od nule. No, poništavaju li se sve te determinante reda l, treba promatrati subdeterminante reda $(l-1)$. Razlika između manjeg od brojeva m i n, te ranga matrice r se zove *defekt matrice*. Dalje, ako matrica ima rang r, tada se r-redna subdeterminanta različita od nule naziva *temeljna subdeterminanta*.

Slijedeći teoremi su vezani uz rang produkta i zbroja matrica:

1) Rang produkta dviju ili više (općenito pravokutnih) matrica ne može biti veći od ranga pojedinih faktora.
2) Množenjem pravokutne matrice s regularnom (kvadratnom) matricom (bilo slijeva, bilo zdesna) ne mijenja se njen rang.
3) Dvije (m,n)-matrice su ekvivalentne onda i samo onda ako im je isti rang. Dvije pravokutne matrice **A** i **B** se nazivaju *ekivalentnim* ako se jedna u drugu mogu prevesti elementarnim operacijama, tj. izmjenom dvaju redaka ili stupaca, zatim množenjem redaka ili stupaca s nekim faktorom različitim od nule, te naposlijetku pribrajanjem pomnoženog retka ili stupca s nekim faktorom, nekom drugom retku ili stupcu. Onda pišemo $\mathbf{A}\approx\mathbf{B}$, odnosno **A** je ekvivalnentno **B**.
4) Dvije (m,n)-matrice **A** i **B** ekvivalentne su onda i samo onda, ako postoji kvadratna regularna m-matrica **C** i kvadratna regularna n-matrica **D**, tako da vrijedi:

$$\mathbf{CAD}=\mathbf{B}.$$

5) Dvije (m,n)-matrice **A** i **B** imaju isti rang onda i samo onda, ako postoje kvadratna regularna m-matrica **C** i kvadratna regularna n-matrica **D** tako da vrijedi:

$$\mathbf{CAD}=\mathbf{B}.$$

6) Ako (m,p)-matrica **A** ima rang r, a (p,n)-matrica **B** ima rang s, onda za rang t njihova produkta **C**=**AB** koji je (m,n) matrica vrijedi:

$$t \geq r+s-p.$$

7) *Nulitet* ν kvadratne n-matrice ranga r je razlika njezina reda i ranga, odnosno:

$$\nu=n-r.$$

   Sylvesterov zakon nuliteta glasi: Nulitet produkta dviju ili više kvadratnih matrica je veći ili jednak nulitetu bilo kojeg drugog faktora, a manji je ili jednak zbroju nuliteta svih faktora. Dokaz teče indukcijom.

8) Rang zbroja dviju ili više matrica istog oblika ja najviše jednak zbroj rangova pojedinih sumanada.

Rješavanje linearnih matričnih jednadžbi

Pomoću do sada navedenog gradiva u stanju smo riješiti matrične jednadžbe oblika:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B} \text{ odnosno } \mathbf{YA}=\mathbf{C}, \qquad (1) \text{ i } (2)$$

analogno rješavajući jednadžbe kao što bismo rješavali i skalarne jednadžbe oblika $ax=b$ i $ya=c$, dok su ovdje: **A** zadana regularna (m,p)-matrica, **B** i **C** zadane pravokutne (m,n) i (n,p)-matrice, te su **X** i **Y** tražene (p,n) i (n,m)-matrice.

$ax=b$

$\frac{1}{a}$ postoji, ako vrijedi da je $a\neq 0$ onda množimo *slijeva* sa $\frac{1}{a}$ (odnosno a^{-1}):

$$\left(\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}b\right) \Rightarrow \left(x=\frac{b}{a}\right)$$

AX=**B**

množimo *slijeva* s $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\left(A^{-1}\cdot AX=A^{-1}B\right)$$

$$\Rightarrow \left(X=A^{-1}B\right).$$

YA=**C**

množimo *slijeva* s $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(YAA^{-1}=CA^{-1})$$

$$\Rightarrow (Y=CA^{-1})$$

Dakle, postupak je formalno jednak.
Može se promatrati i još općenitija jednadžba od ovih:

$$AXC = B\,, \qquad (3)$$

ili još općenitije:

$$A_1XC_1 + A_2XC_2 + \ldots + A_kXC_k = B\,. \qquad (4)$$

Jednadžbe takvog oblika se nazivaju *linearne matrične jednadžbe*.
Ako je u jednadžbi (1) n=1, odnosno **B** i **X** su jednostupčani vektori, i to je **B** m-komponentni, a **X** je p-komponentni vektor. Onda se jednadžba (1) može zapisati ovako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Ili ako zapišemo vektore kako se inače pišu, tj. malim slovima: **Ax**=**b**.
Ako se produkt na lijevoj strani jednadžbe (5) izmnoži, dobiva se:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Jednakost matrica u izrazu (6) znači da elementi u istim položajima moraju biti jednaki, tj.:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p = b_m \end{array}. \qquad (7)$$

Dakle, matrična jednadžba (1) sa n=1 ekvivalentna je sustavu od m linearnih jednadžbi sa p nepoznanica x_1, x_2, ..., x_p. Problem rješavanja takvih jednadžbi ću obraditi u dijelu: Rješavanje sustava linearnih jednadžbi pomoću matričnog računanja.
Ako se sheme matrica **A** i **B** u jednadžbi (1) spoje u jednu matricu tako da slijeva stoje elementi matrice **A**, a s desna elementi matrice **B**, dobivamo *povećanu matricu* **C** matrične jednadžbe (1):

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Ta je matrica (m,p+n)-matrica.
Za slučaj n=1, bit će:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} & b_m \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Kod matričnih jednadžbi postoje slijedeći teoremi:

1) Neka rang (m,p)-matrice **A** iznosi r, a rang povećane matrice **C** prema izrazu (9) je jednak s. Onda jednadžba (5) (odnosno **Ax**=**b**) ima rješenje onda i samo onda, ako je r=s. No, ako je r<s (a tada je nužno r=s–1) jednadžba **Ax**=**b** nema rješenja. Rješenje je jednoznačno određeno ako je r=s=p, što je moguće samo ako je m≥p, tj. ako matrica **A** ima barem toliko redaka koliko ima stupaca. Ako je r=s<p, onda postoji (n–r) parametarsko rješenje.
2) Jednadžba **Ax**=**0**, gdje je **A** (m,p)-matrica, **0** je m-komponentni nulvektor, a **x** je p-komponentni vektor, ima uvijek tzv. *trivijalno rješenje* **x**=**0**. To je rješenje jedino ako je r=p, što je moguće samo ako je m≥p. Ako je r<p, onda postoji (n–r)-parametarsko rješenje koje trivijalno **x**=**0** sadržava kao specijalan slučaj. Drugi specijalan slučaj odgovara jednadžbi (1) kada je m=p=n, tj. kada su **A**, **B** i **X** kvadratne matrice, i **A** je regularna matrica. Rješenje se odmah dobiva množeći slijeva s $\mathbf{A}^{-1}$:

$$A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B.$$

3) Neka je rang (m,p)-matrice **A** jednak r, rang (m,n)-matrice **B** jednak t, a rang povećane matrice **C** prema izrazu (8) jednak s. Onda jednadžba (1) ima rješenje onda i samo onda, ako je r=s. Ako je r<s, jednadžba (1) nema rješenja. Rješenje je jednoznačno određeno (ima samo jedno rješenje) ako je r=s=p, što je moguće samo ako **A** ima barem redaka koliko ima stupaca. Ako je r=s<p, onda postoji n(n–r)-parametarsko rješenje.
4) Jednadžba:

$$AX = 0$$

kod koje je **A** (m,p)-matrica ranga r, **X** je (p,n)-matrica, a **0** je (m,n)-nulmatrica, ima uvijek *trivijalno rješenje* **X**=**0**, tj. (p,n)-nulmatricu. To je jedino rješenje ako je r=p. Ako je r<p, onda postoji n(n–r)-parametarsko rješenje, koje sadržava **X**=**0** kao specijalan slučaj.
5) Ako su n-matrice **A** i **B** djelitelji nule tako da vrijedi:

$$\mathbf{AB}=\mathbf{0},$$

i ako **A** ima rang r i nulitet μ, a **B** ima rang s i nulitet ν, onda vrijedi:

$$0<r<n,\ \ 0<s<n\ \ \text{i}\ \ r+s\le n,$$

$$0<\mu<n,\ \ 0<\nu<n\ \ \text{i}\ \ \mu+\nu\ge n.$$

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi pomoću matričnog računanja

Računanje pomoću matrica omogućava prikazivanje sustava linearnih jednadžbi u zbijenom i preglednijem obliku i time znatno olakšava računanje, a omogućava i određivanje skupina nepoznanica.

1) Sustav nehomogenih linearnih jednadžbi
   Neka imamo zadan sustav od m nehomogenih linearnih jednadžbi sa n nepoznanica:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right| . \qquad (10)$$

Sustav nehomogenih jednadžbi (10) je *kompatibilan* ako postoji barem jedno rješenje $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koje pretvara sve jednadžbe u identitete, odnosno je *inkompatibilan* ili *protivrječan* ako ne postoji niti jedno takvo rješenje. Kompatibilan sustav jednadžbi je *određen* ako postoji jedno rješenje, odnosno *neodređen* ako postoji beskonačno mnogo rješenja.

Možemo koeficijente sustava jednadžbi zapisati kao *matricu koeficijenata sustava jednadžbi*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ako matrici **A** dodamo stupac slobodnih članova b_1, b_2, ..., b_n, dobit ćemo proširenu matricu koeficijenata sustava jednadžbi:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Ako se prisjetimo matričnih linearnih jednadžbi, možemo vidjeti da jednadžbe sustava (10) imaju rješenja onda i samo onda, ako je rang r matrice **A** jednak rangu s proširene matrice **B**. Ako je $r<s$ jednadžbe su protivrječne pa nema rješenja. Ako je $r=s=n$, što je moguće ako vrijedi da je broj jednadžbi $m \geq n$ broju nepoznanica, rješenje je jednoznačno određeno.

2) Sustav homogenih linearnih jednadžbi

Sustav homogenih linearnih jednadžbi ima općenito oblik:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right| . \qquad (11)$$

Rang matrice **A** koeficijanata sustava jednadžbi (11) i rang proširene matrice **B** su jednaki (po svojstvima matrica), pa je homogeni sustav uvijek kompatibilan. Očito je da taj sustav uvijek ima nulto, tzv. *trivijalno rješenje* $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Da bi homogeni sustav jednadžbi imao još rješenja različitih od trivijalnog, nužno i dovoljno je da rang matrice **A** koeficijenata sustava jednadžbi bude manji od broja nepoznanica ($r<n$) i sustav jednadžbi ima tada beskonačno mnogo rješenja koja se mogu zapisati kao:

$$\{ka_1, \quad ka_2, \quad \ldots, \quad ka_n\},$$

gdje je *k* bilo koji broj. Ako sustav (11) ima *t* rješenja koja su različita od nule:

$$\{\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad ..., \quad \alpha_n\}, \{\beta_1, \quad \beta_2, \quad ..., \quad \beta_n\}, ..., \{\omega_1, \quad \omega_2, \quad ..., \quad \omega_n\}, \quad (12)$$

onda ima i beskonačno rješenja koja se mogu ovako zapisati:

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\beta_1 + ... + k_t\omega_1, \ ..., \ k_1\alpha_n + k_2\beta_n + ... + k_t\omega_n\}, \quad (13)$$

gdje su k_1, k_2, ..., k_t bilo koji brojevi različiti od nule.

Rješenja (13) se nazivaju *linearne kombinacije* rješenja (12). Rješenja (12) sustava jednadžbi (11) su *linearno nezavisna* ako niti jedno od njih nije linearna kombinacija ostalih rješenja. *Temeljni sustav rješenja* čini *t* tih rješenja, ako je bilo koje rješenje sustava jednadžbi (11) linearna kobinacija ostalih rješenja. Uvjet postojanja temeljnog sustava jednadžbi je da rang *r* matrice **A** koeficijenata jednadžbi bude manji od broja *n* nepoznanica ($r<n$) , dok za $r=n$ temeljni sustav ne postoji i jednadžbe imaju samo trivijalno rješenje. Ako je $r<n$, temeljni sustav se sastoji od $(n-r)$ linearno nezavisnih rješenja.

Rastavljanje matrica u blokove

Ako imamo zadan sustav od npr. *n* linearnih jednadžbi sa *n* nepoznanica, a trebamo odrediti samo *p* nepoznanica, matrice možemo rastaviti pravcima paralelnim sa stupcima i recima matrica u *blokove* kao matrične elemente te zadane matrice.
Imamo zadan sustav:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right| . \quad (14)$$

Taj sustav možemo zapisati kao **Y**=**AX**, ako označimo

$$\text{sa } \mathbf{Y} \text{ matricu } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ s } \mathbf{X} \text{ matricu } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix},$$

a s **A** matricu koeficijenata zadanog sustava (14). Da bismo riješili zadani sistem tražeći samo prvih *p* nepoznanica, možemo zapisati matricu **A** u obliku:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{1,1} & ... & a_{1,p} & a_{1,p+1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p,1} & ... & a_{p,p} & a_{p,p+1} & ... & a_{p,n} \\ \hdashline a_{p+1,1} & ... & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & ... & a_{p+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,p} & a_{n,p+1} & ... & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right].$$

Možemo smatrati da se matrica **A** sastoji od četiri matrice $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ i $\mathbf{A_4}$. Analogno se i dobiva:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \\ \hdashline y_{p+1} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 \\ \hdashline Y_2 \end{bmatrix} \text{ i } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \\ \hdashline x_{p+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{bmatrix}.$$

Sustav (14) se može prikazati kao:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \hdashline Y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{bmatrix}.$$

Može se smatrati da su matrice unutar matrica elementi sustava pa možemo pisati:

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_1 X_1 + A_2 X_2 \\ Y_2 &= A_3 X_1 + A_4 X_2 \end{aligned}.$$

Dalje isključujemo $\mathbf{X_2}$ iz druge jednadžbe:

$$A_4 X_2 = Y_2 - A_3 X_1 \quad \Big| \cdot A_4^{-1},$$

pa dobivamo:

$$X_2 = A_4^{-1}\left(Y_2 - A_3 X_1\right).$$

Ako to uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo kao konačni oblik:

$$Y_1 - A_2 A_4^{-1} Y_2 = \left(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3\right) X_1,$$

što je sustav od p jednadžbi oblika **Y**=**AX** koje ne sadržavaju x_{p+1}, ..., x_n.

IV. LITERATURA

Dr. ing. DANILO BLANUŠA: "Viša matematika", I dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1965., str. 233-363

ZORA BAKARIĆ: "Kombinatorika, determinanta, vektorski račun, analitička geometrija prostora", Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1963., str. 14-32

Dr. STANKO BILINSKI: "Analitička geometrija (s uvodom u linearnu algebru)", Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1963., str. 15-81

Prof. dr. ing. BORIS APSEN: "Repetitorij više matematike", treći dio, Tehnička knjiga, Zagreb 1994., str. 1-22

Prof. dr. ing. BORIS APSEN: "Repetitorij više matematike", četvrti dio, Tehnička knjiga, Zagreb 1994., str. 133-180

I. I. PRIVALOV: "Analitička geometrija", Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo 1968., str. 133-180

"Enciklopedija leksikogafskog zavoda", Leksikografski zavod, Zagreb 1967., općenite definicije matrice i determinante